

**05-03 Activité**

Leonhard Euler est un mathématicien suisse, né en 1707 et mort en 1783.

Enfant précoce, il entre à l'université à 13 ans.

Il crée la notion de fonction en mathématiques et invente la notation  $f(x)$  ainsi que d'autres notations telles que  $\Sigma$  (somme),  $i$  (nombre imaginaire) et  $e$  (exponentielle).

En géométrie, il démontre que, dans tout triangle, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité sont alignés.



En 1748, Euler étudie la fonction  $f$  qui, à tout réel  $x$ , associe le nombre complexe  $f(x) = \cos(x) + i \sin(x)$ .

1. Il considère deux réels  $x$  et  $x'$ . Il écrit puis développe l'expression  $f(x)f(x')$ .
  - a] En utilisant les formules d'addition, quelle propriété de la fonction  $f$  remarque Euler ?
  - b] Quelle autre fonction présente cette propriété ?
2. Euler décide alors de dériver  $f$ .
  - a] Quel lien voit-il entre  $f$  et  $f'$  ?
  - b] Quelle autre fonction présente cette propriété ?
3. Fidèle à son habitude, Euler invente une nouvelle notation pour  $\cos(x) + i \sin(x)$ . Laquelle ?

**05-03 Activité**

Leonhard Euler est un mathématicien suisse, né en 1707 et mort en 1783.

Enfant précoce, il entre à l'université à 13 ans.

Il crée la notion de fonction en mathématiques et invente la notation  $f(x)$  ainsi que d'autres notations telles que  $\Sigma$  (somme),  $i$  (nombre imaginaire) et  $e$  (exponentielle).

En géométrie, il démontre que, dans tout triangle, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité sont alignés.



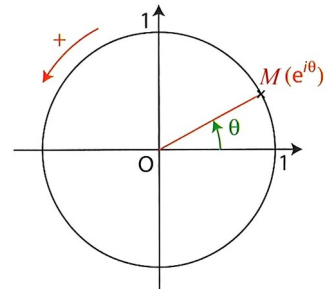
En 1748, Euler étudie la fonction  $f$  qui, à tout réel  $x$ , associe le nombre complexe  $f(x) = \cos(x) + i \sin(x)$ .

1. Il considère deux réels  $x$  et  $x'$ . Il écrit puis développe l'expression  $f(x)f(x')$ .
  - a] En utilisant les formules d'addition, quelle propriété de la fonction  $f$  remarque Euler ?
  - b] Quelle autre fonction présente cette propriété ?
2. Euler décide alors de dériver  $f$ .
  - a] Quel lien voit-il entre  $f$  et  $f'$  ?
  - b] Quelle autre fonction présente cette propriété ?
3. Fidèle à son habitude, Euler invente une nouvelle notation pour  $\cos(x) + i \sin(x)$ . Laquelle ?

## 05-03 La notation exponentielle

### Notation et définition

Pour tout réel  $\theta$ , on note :  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ .



### Exemples

$$e^{i2\pi} = 1$$

$$e^{i\pi/2} = i$$

$$e^{i\pi} = -1$$

### Remarques

- Le nombre complexe  $e^{i\theta}$  est l'afixe du point  $M$  du cercle trigonométrique tel que  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \theta$ .
- L'égalité  $e^{i\pi} + 1 = 0$  est appelée **identité d'Euler** : elle est considérée « mathématiquement belle ».

### Propriétés

Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Soit  $(\theta; \theta') \in \mathbb{R}^2$ .

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$$

### Exemple

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\pi/6} \times e^{i\pi/4}}{e^{i\pi/12}} &= \frac{e^{i(\pi/6 + \pi/4)}}{e^{i\pi/12}} \\ &= \frac{e^{i5\pi/12}}{e^{i\pi/12}} \\ &= e^{i\pi/3} \end{aligned}$$

### Définition

La **forme exponentielle** d'un nombre complexe non nul  $z$  d'argument  $\theta$  est :  $z = |z|e^{i\theta}$ .

### Exemple

La forme exponentielle de  $-1 + i\sqrt{3}$  est  $2e^{i2\pi/3}$ .

## 05-03 Applications

## Application 1

Compléter le tableau.

| Forme algébrique de $z$ | Forme exponentielle de $z$ | Module de $z$ | Argument de $z$  |
|-------------------------|----------------------------|---------------|------------------|
| $-4 + 4i$               |                            |               |                  |
|                         |                            | 5             | $\frac{2\pi}{3}$ |
|                         | $2e^{-i\pi/6}$             |               |                  |

## Application 2

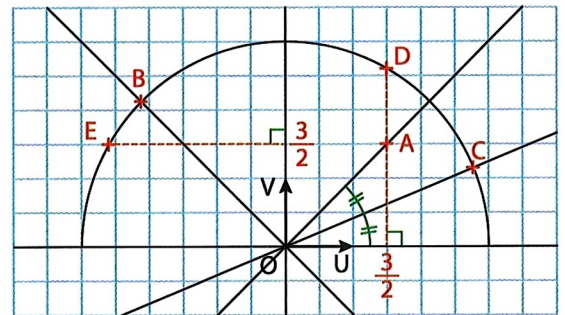
Sur la figure ci-contre, on considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives  $z_A, z_B, z_C, z_D$  et  $z_E$ .

1. Lire les valeurs de  $z_A, z_B, z_C, z_D$  et  $z_E$  et les écrire sous forme exponentielle.
2. En déduire les valeurs suivantes.

a]  $z_A z_B$

b]  $\frac{z_D}{z_C}$

c]  $z_E^4$



## Application 3

Soit un nombre complexe  $z$  non nul d'argument  $\frac{2\pi}{7}$ .

1. Déterminer un argument des nombres suivants.

a]  $i z$

b]  $\frac{z}{i}$

c]  $\frac{i}{z}$

2. Calculer  $\arg(z^{21})$ .

## Application 4

On donne  $z_1 = 3 - 3i$  et  $z_2 = -\sqrt{3} + i$ .

1. Écrire  $z_1 z_2$  sous forme algébrique puis exponentielle.
2. Déterminer la valeur exacte de  $\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ .